**Науковий вісник Львівського національного університету
ветеринарної медицини та біотехнологій імені С.З. Гжицького.
Серія: Харчові технології**

**Scientific Messenger of Lviv National University
of Veterinary Medicine and Biotechnologies.
Series: Food Technologies**

ISSN 2519-268X print
ISSN 2707-5885 online

doi: 10.32718/nvlvet-f9612
<https://nvlvet.com.ua/index.php/food>

UDC 515.2

Kinematic projection in modern technologies

I. G. Svidrak, I. S. Aftanaziv, O. I. Strogan, A. O. Shevchuk

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

Article info

Received 20.05.2021
Received in revised form
21.06.2021
Accepted 22.06.2021

National University "Lviv
Polytechnic", S. Bandera Str., 12,
Lviv, 790013, Ukraine.
Tel.: +38-066-229-50-87
E-mail: svidrak99@gmail.com

Svidrak, I. G., Aftanaziv, I. S., Strogan, O. I., & Shevchuk, A. O. (2021). Kinematic projection in modern technologies. Scientific Messenger of Lviv National University of Veterinary Medicine and Biotechnologies. Series: Food Technologies, 23(96), 67–75. doi: 10.32718/nvlvet-f9612

The trajectories and coordinates of unmanned aircrafts spatial location determination is researched with the help of kinematic projection means. The methodology offered below considers the formation of two mobile and independent kinematic projection centers raised into the air by drones. The electromagnetic radio waves emitted by them, penetrating an unknown aircraft object, form two independent projecting rays intersecting at the searched aircraft location point. In this case, the searched object spatial location instantaneous (at a certain point in time) point will be placed on an imaginary "picture plane" on a line connecting the points projections generated by drones interceptors projecting rays. As far as all of the projection objects in this case are movable, all the moving trajectory projection of the searched aircraft will be displayed on the monitor. The introduction of another "picture plane", perpendicular to the main one, will help to build an axonometric mapping not only for projections, but also for the aircraft spatial movement trajectory itself. Each point of this trajectory gives an information about the "instantaneous" coordinates of the aircraft spatial location. The method of application of kinematic projection for display of a trajectory of movement and search of coordinates of moving objects is described. In kinematic projection, all its key components, namely the object, the center of projection, the image plane and the projecting rays, are in continuous motion with certain speeds and accelerations. Kinematic projection deepens the field of practical application of descriptive geometry. This is confirmed by the example of practical application of kinematic projection presented in the article for improvement of remote control of tillage equipment in automated land treatment complexes. The main technical support for the practical application of kinematic projection are stationary radio towers or unmanned aerial vehicles (BPLA), such as drones. They are equipped with video cameras and electromagnetic radiation devices. This equipment serves as a center of kinematic projection. The projecting rays generated by the projection center will be received by a stationary command post (center). It is equipped with a radar system (radar) and modern computer equipment with appropriate software. This equipment, in this case, performs the function of a "picture plane", which will reflect the trajectory of agricultural machinery. Actuators and controls of the movement of tillage equipment are equipped with receivers of control radio waves and means of automated control. The use of kinematic projection helps to improve the quality of tillage. This is ensured by the fact that its use is carried out automatically and eliminates possible errors of operators. Kinematic projection can also be used in military affairs to detect enemy drones in the airspace. In this case, use a kind of kinematic projection with its two centers of generation of projecting rays. This is an example of the solution of the so-called "inverse problem" of kinematic projection, which provides the ability to search for the coordinates of the motion of the projected object at a known trajectory of its motion. The main advantage of kinematic projection is the ability to identify and display an object on a computer screen not only in a flat view, but also taking into account its spatial coordinates.

Key words: unmanned aircraft, drone, movement trajectory, kinematic projection, projection moving center, trajectory projection, projecting ray, operator, software.

Кінематичне проєціювання в сучасних технологіях

I. Г. Свідрак, I. С. Афтаназів, О. І. Строган, А. О. Шевчук

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

Розглянуто визначення траєкторії руху та координат просторового розташування безпілотних літальних апаратів (БПЛА) засобами кінематичного проєціювання. Запропонована методика передбачає формування піднятим у повітряний простір дронами-перехоплювачами двох рухомих і незалежних центрів кінематичного проєціювання. Випромінювані ними електромагнітні радіохвилі, пронизуючи невідомий літальний об'єкт, формують два незалежних проєктуючих промені, що перетинаються між собою в точці розташування розшукуваного літального апарату. При цьому миттєва (на певний момент часу Δt) проєкція точки просторового розташування розшукуваного об'єкту розміститься на уявній «картинній площині» на лінії, що з'єднує між собою проєкції точок генерованих дронами-перехоплювачами проєктуючих променів. Оскільки всі об'єкти проєціювання у даному випадку є рухомими, на екрані монітора оператора відобразиться вся проєкція траєкторії руху розшукуваного об'єкту. Запровадження ще однієї «картинної площини», перпендикулярної до основної, дозволить побудувати аксонометричне відображення не тільки проєкцій, а й безпосередньо самої траєкторії просторових переміщень літального апарату. Кожна точка цієї траєкторії надає інформацію про «миттєві» координати просторового розташування літального апарату. Досліджено методику застосування кінематичного проєціювання для відображення траєкторії руху та пошуку координат рухомих об'єктів. З'ясовано, що специфікою кінематичного проєціювання є те, що всі її ключові складові, а саме – об'єкт, центр проєціювання, картинна площина та проєктуючі промені, знаходяться у неперервному русі із певними швидкостями та прискореннями. Така специфічна особливість кінематичного проєціювання не тільки істотно розширює технологічні можливості нарисної геометрії як науки про графічне відображення просторових об'єктів, а й істотно поглиблює галузі практичного її застосування. Встановлено, що підтвердженням цьому є розглянуті у даній роботі приклади практичного застосування специфіки кінематичного проєціювання для вдосконалення дистанційного керування землеобробною технікою в автоматизованих комплексах управління. З'ясовано, що це дає змогу усувати негативний вплив «людських чинників» операторів, що відстежують траєкторії переміщень техніки оброблюваною земельною ділянкою. Досліджено, що основні складові технічного забезпечення практичного застосування кінематичного проєціювання для відстежування переміщень землеобробної техніки й різних транспортних засобів полягає в оснащенні відеокамерами та приладами електромагнітного випромінювання стаціонарні радіовежі або безпілотні літальні апарати (БПЛА), наприклад, дрони, що виконуватимуть функції центрів кінематичного проєціювання. Рекомендовано, що сприймання генерованих центром проєціювання проєктуючих променів тут може бути покладено на оснащений радіолокаційною системою (РЛС) та сучасним комп'ютерним спорядженням із відповідним програмним забезпеченням стаціонарний командний пункт (центр). Це устаткування, у даному випадку, виконуватиме функцію «картинної площини», на якій відобразитиметься траєкторія руху землеобробної техніки. З'ясовано, що виконавчі механізми та органи управління рухом землеобробної техніки у цьому випадку доречно оснастити приймачами радіохвилі пристроями та засобами автоматизованого управління. Представлено, що окрім відстежування траєкторії рухів об'єктів на земній поверхні кінематичне проєціювання може застосовуватися й у військовій справі для виявлення ворожих безпілотних об'єктів у повітряному просторі. У цьому випадку використовують різновид кінематичного проєціювання із двома його центрами генерування проєктуючих променів.

Ключові слова: безпілотний літальний апарат, дрон, траєкторія руху, координати, кінематичне проєціювання, рухомий центр проєціювання, проєкція траєкторії, проєктуючий промінь, оператор, програмне забезпечення.

Вступ

Розвиток впродовж останніх десятиліть космічної техніки, засобів зв'язку та комунікацій, комп'ютерних мереж тощо неодмінно мали зумовити формування і постановку нових задач та проблематик перед інженерною наукою. Зокрема і як щодо спроможностей забезпечення не лише підвищених швидкостей просторових переміщень різноманітних об'єктів, а і стосовно теоретичного опису та відображення координатної прив'язки рухомих об'єктів та засобів контролю їхнього стану і переміщень. Проблематика потреби невинного контролю за рухомими об'єктами сприяла не лише стрімкому розвитку сучасних технічних засобів радіозв'язку та передачі інформації, а й певною мірою дотичних до опису рухомих об'єктів наук, зокрема аерофотогеодезії, оптичної фізики, певних напрямів математики, покликаних теоретично описати і обґрунтувати закономірності їх руху (Bespalov et al., 2020; Shevchyk et al., 2021).

Торкнулась ця проблематика і такої складової математичної науки як нарисна геометрія. Зокрема перед нарисною геометрією як наукою геометричного відображення взаєморозташування елементів простору постало завдання створення теорії кінематичного відображення. Під кінематичним відображенням слід розуміти проєціювання, при якому всі його елементи, а саме центр проєціювання, фокальні фігури проєціюючих комплексів і конгруенцій, об'єкт проєціювання (прообраз) та носій проєкцій («картинна площина»)

можуть здійснювати взаємозалежні просторові переміщення у просторі й часі.

Одним із перших фундаментальних досліджень в галузі кінематичних проблем графічних відображень можна вважати опубліковану в 1936 році роботу М. А. Риніна «Кіноперспектива» (Rynin, 1936). У даній роботі розглянуті деформації кінозображення рухомих предметів. Тут же досліджена і зворотна задача – визначено складові руху об'єкта за його кінематографічним відображенням. Описано також певні часткові випадки руху оригіналу, зокрема прямолінійні, що перпендикулярні «картинній площині», а також обертові.

Дослідженнями Л. М. Ліхачова, що відображені в роботах (Lihachev, 1975), було систематизовано попередній досвід кінематичного проєціювання. У його опублікованій в 1975 р. монографії «Кіноперспектива» досліджено проблематику реконструювання просторових форм і траєкторій руху об'єкту, методи визначення швидкостей і прискорень тощо. В основу запропонованої Л. М. Ліхачовим кіноперспективи покладено запроваджене ним поняття «кванта руху», під яким розуміється певна абстрактна величина миттєвого просторового переміщення точки за інтервал часу t .

$$\Delta S = \Delta x + \Delta y + \Delta z$$

Квант руху фігури визначається системою квантів руху окремих її точок. Після цього розглядаються перспективні зображення квантів руху відрізків і площин, що названі автором квантограмами, та проводиться їх реконструкція і аналіз.

Роботи О. К. Кульмінського (Kul'minskij & Nikolaevskij, 1971) присвячено проблематиці кіноперспективи та кіноаксонометрії як методу об'ємно-графічного моделювання. Тут же розглядається і перспектива застосування кіноаксонометрії до проектування автомобільних шляхів.

У дослідженнях В. Є. Михайленко і М. В. Ковтун (Mihajlenko et al., 1972) розглядається проектування так званим “пласким” жмутком, що переміщується у вертикальному напрямку. У цьому випадку кінематичні “щільові” фотографування дозволяють усунути традиційне проєціювання із декількох центрів і принаманне йому “змазування” зображення на картинній площині. Картинна основа тут зазвичай перпендикулярна траєкторії руху центра. У статті розглянуто проєціювання лінійних і нелінійних (2-го порядку) об'єктів та реконструкція прообразів за власними та відкинутими тіннями.

У роботі Д. І. Ткач (Tkach, 1968) досліджено центрове рухоме проєціювання, в якому траєкторія центру проєкування прямолінійна і перпендикулярна до площини проєкції, а прообрази нерухомі. Тут встановлено існування простору-проєкції, який перебуває в перспективному зв'язку із простором-оригіналом, і бієктивна відповідність між цими просторами.

У опублікованій в 1991р. роботі (Pilipaka, 1991) автора С. Ф. Пилипака подано алгоритмічний опис послідовності визначення точок твердого тіла, що переміщується по просторовій криволінійній траєкторії з допомогою проєціювання із нерухомого центра на рухому площину.

Вагомий внесок у становлення та розвиток кінематичного проєціювання привнесено науковцями НУ “Львівська політехніка” В. М. Глоговським та І. Г. Пулькевич. У їхніх роботах (Kalinovskaja et al., 1994; Pulkevych, 1994) вперше було запропоновано використання розроблених ними лінійних операторів для грамографічних, ротографічних та спірографічних відображень рухомих об'єктів простору.

Поряд зі створенням алгоритмів рішень прямої задачі кінематичного проєціювання для пошуку проєкцій траєкторій просторових переміщень об'єктів авторами (Kalynovska et al., 1994) було розроблено і ґрунтовно досліджено також і алгоритми рішення оберненої задачі. Обернена задача передбачає пошук за відомими траєкторією руху координат просторового розташування об'єкта.

Таким чином, варто відзначити, що науковцями-геометрами усвідомлена проблематика та потреба у переході від вже доволі досконало вивченого статичного проєціювання до кінематичного.

Мета і методи дослідження – розробка принципових схем та алгоритмів рішення і застосування прямої та оберненої задач кінематичного проєціювання. Також до завдань дослідження належало: створення алгоритму побудови проєкцій траєкторій просторових переміщень об'єктів кінематичного проєціювання; розробка принципової схеми вдосконаленого методикою кінематичного проєціювання автоматизованого землеобробного комплексу; розробка методик використання алгоритму рішення “оберненої задачі”

кінематичного проєціювання для пошуку в повітрі та товщі води рухомих об'єктів.

Матеріал і методи досліджень

Дослідження кінематичних проєкційних відображень доцільно почати з розгляду лінійних операторів. Зокрема, для систематизації сполучення основних видів руху, що розглядаються в даній роботі, потрібно дослідити грамографічне відображення – відображення, при якому всі елементи проєкційного апарату здійснюють прямолінійні рухи (рис. 1).

Рис. 1. Принципова схема грамографічного відображення проєкції точки при центровому кінематичному проєціюванні

Умовно кінематичні відображення лінійними операторами позначають

$$F : A_j \xrightarrow{P_i} A_j (j = 1, 2, \dots).$$

При цьому прийнято до уваги, що проєціювання здійснюється при одночасних та взаємоналежних рухах всіх елементів відображення (прообразу A , центру проєкування P і носія образів π)

$$r_a : A_j = A_j(t); \quad r_p : P_j = P_j(t); \quad r_\pi : \pi_j = \pi_j(t).$$

(...) – в дужках позначаються види рухів: γ – прямолінійний, ρ – обертовий, σ – гвинтовий.

Графічне відображення лінійними операторами здійснюється за допомогою вироджених комплексів нульової кривини, зокрема центровим проєціюванням за таким алгоритмом.

$$F : A_j \xrightarrow{P_i} A'_j (j = 1, 2, \dots).$$

$$r_a : A_j = A_j(t); \quad r_p : P_j = P_j(t); \quad r_\pi : \pi_j = \pi_j(t).$$

$$P_j \cup A_j = S_j$$

$$S_j \cap \pi_j = A'_j$$

$$\{A'_j\} \supset A'_1, A'_2, \dots$$

Будемо вважати, що між кінематичними режимами руху (швидкість, прискорення) точки та центру проєкування і порядком променевої проєкціуючої

поверхні виведені та досліджені рівняння первинних та вторинних проекцій траєкторій прообразу A при: рівномірному русі A та рівнозмітному русі центру проєкціювання P ; рівномірному русі A і P в спеціалізованому положенні, коли $A_0(x_{01}, 0, Z_{01})$, $P_0(x_{02}, y_{02}, 0)$. На основі виведених рівнянь необхідно визначити види траєкторій прообразу рухомого об'єкту.

Нехай $f_1(y=y_1; z=z_1; x=b_1)$ і $f_2(x=x_2; z=z_2)$ прямо-
лінійні траєкторії руху відповідно до прообразу (точ-
ки) A і центру проєкціювання P , які починають одно-
часно рухатись: точка A – рівномірно зі швидкістю v_0
і прискоренням a (рис. 2).

Задані умови руху виділяють із лінійчатого конгруенції $s^2(f_1; f_2)$ з фокальними фігурами f_1 і f_2 променеву поверхню $\sigma \supset A_i, P_i$ як неперервну множину проєкціюючих променів $\{s_i | (s_i \supset A_i; P_i)$, що відповідають миттєвим положенням точок A і P . Для довільної точки $s(x, y, z) \in \sigma$, що лежить на промені $s_i \subset A_i, P_i$ в момент часу t маємо такі відношення:

Рис. 2. Грамографічні відображення проєкцій рухомих об'єкту (точка A) та центру проєціювання (точка P_0) на епюрі Монжа

$$\frac{\Delta y - \left(v_o \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \right)}{\Delta x + v_o \cdot t \cdot \cos \arctg k_x} = \frac{y - y_{01}}{x - x_{01} + v_o \cdot t \cdot \cos \arctg k_x} \quad (1)$$

$$\frac{\Delta z - v_o \cdot t \cdot \sin \arctg k_z}{\Delta x - v_o \cdot t \cdot \cos \arctg k_z} = \frac{z - z_{02}}{z_{02} - x} \quad (2)$$

$$(\Delta x = |x_{02} - x_{01}|, \Delta y = |y_{02} - y_{01}|, z = |z_{02} - z_{01}|)$$

Після підстановки значення

$$t = \varphi(x, z) = \frac{\Delta z(x_{02} - x) - \Delta x(z - z_{02})}{v_o [(z - z_{02}) \cdot \cos \arctg k_z + (x_{02} - \sin \arctg k_z)]}$$

з (1) отримуємо рівняння

з (1) отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} & \Delta y - \left(v_o \cdot \phi(x, z) + \frac{a}{2}(x, z)^2 \right) \cdot (x - x_{o1} + v_o \cdot \phi(x, z) \cdot \cos \arctan k_z) - \\ & - (\Delta x + v_o \cdot \phi(x, z) \cdot \cos \arctan k_z) \cdot (y - y_{o1}) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

що визначає поверхню третього порядку.

Якщо прообраз A і центр проєкціювання P здійснюють рівномірний рух по прямих, відповідно зі швидкостями v_1 і v_2 , то поверхня є квадрикою (однопорожнинний гіперболоїд або, в граничному випадку – гіперболічний параболоїд), тоді рівняння (1) набуває такого вигляду

$$\begin{aligned}
 & (\Delta y - v_2 \cdot \varphi(x, z)) \cdot (x - x_{01} + v_1 \cdot \varphi(x, z) \cdot \cos \arctg k_z) - \\
 & - (\Delta x + v_1 \cdot \varphi(x, z) \cdot \cos \arctg k_z) \cdot (y - y_{01}) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

де

$$\varphi(x, z) = \frac{\Delta x \cdot (z - z_{02}) - \Delta z \cdot (x_{02} - x)}{v_1 \cdot [(z - z_{02}) \cdot \cos \arctg k_z - (x_{02} - x) \cdot \sin \arctg k_z]}.$$

В загальному випадку, коли шлях, що проходить A або P за час t , рівний $v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$, поверхня має порядок $n+1$. Тепер введемо до розгляду площину проєкцій π з фіксованою в ній координатною системою η_Σ .

Задамо початкові положення
 $A_0(x_{01}, y_{01}, z_{01})$, $P_0(x_{02}, y_{02}, z_{02})$ і $\pi_0(x = o, \eta = y, \zeta = z)$ еле-
 ментів відображення і прямолінійні траєкторії

$$f_2(y = k_{2_v} \cdot x + b_{2_v} z = k_{2_l} \cdot x + b_{2_l}),$$

Відповідно до точок A і P . Прийmemo також, що в процесі руху площини π вісь x залишається її напрямним вектором.

Нехай елементи відображення починають одночасний рух: прообраз A і площина π – рівномірний зі швидкістю v_0 , а центр P – рівномірний з початковою швидкістю v_0 та прискоренням a . Тоді в кожний момент часу t_l проєкція f'_l прямої f_l на площину π в положенні $\pi_1(x = v_0 \cdot t_l)$, що відповідає цьому моменту часу, є перетином променевої поверхні з площиною π .

Параметричні рівняння $y = y(t)$, $z = z(t)$ нескінчених множин вторинних проєкцій $^1A', ^1A'_2, \dots; ^2A', ^2A'_2, \dots$; (перепроєкційованих з рухомої площини π на нерухомі площини проєкцій xy і xz) точки A в її послідовних положеннях на f_l являють собою параболічні гілки третього порядку типу

$$y = d_1 \cdot x^3 + d_2 \cdot x^2 + d_3 \cdot x + d_4$$

за класифікацією Ньютона, а саме:

$$(y_{02} - I_2 - y) \cdot (x_{01} - m_1 - v_0 \cdot t) = (x_{02} - m_2 - v_0 \cdot t) \cdot (y_{01} + I_1 - y), \quad (5)$$

$$(z - z_{02} - n_2) \cdot (\Delta x + m_1 - m_2) = (x_{02} - m_2 - v_0 \cdot t) \cdot (\Delta z - n_1 - n_2), \quad (6)$$

де

$$\Delta x = |x_1 - x_2|; \Delta z = |z_1 - z_2|;$$

$$m_1 = v_0 \cdot t \cdot \cos \gamma_1 \cdot \cos \beta_1; m_2 = \left(v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \right) \cdot \cos \gamma_2 \cdot \cos \beta_2;$$

де

$$n_1 = v_0 \cdot t \cdot \cos \gamma_1 \cdot \sin \beta_1; n_2 = \left(v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \right) \cdot \cos \gamma_2 \cdot \sin \beta_2;$$

$$I_1 = v_0 \cdot t \cdot \cos \gamma_1 \cdot \sin \beta_1; I_2 = \left(v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \right) \cdot \cos \gamma_2 \cdot \sin \beta_2.$$

Тут

$$\alpha_1 = \arctg k_{1x}; \beta_1 = \arctg k_{1y}; \gamma_1 = \arctg(\tg \alpha_1 \cdot \cos \beta_1); j = 1, 2$$

При рівномірному русі всіх елементів відображення рівняння (5) і (6) визначають квадратичні параболи.

В гранично спеціалізованому положенні траєкторії прообразу $A_0(x_{01}, O_1 z_{01})$ і центра $P_0(x_{02}, y_{02}, o)$

$$f_1(x = x_1, y = 0), f_2(x = x_2, z = 0)$$

і рівномірному русі всіх елементів з однаковою одиничною швидкістю ($v = 1$) рівняння $y = y(t)$ і $z = z(t)$ мають вигляд

$$y = \frac{1}{\Delta x} \cdot (y_2 - t) \cdot (x_1 - t), \quad (7)$$

$$z = \frac{1}{\Delta x} \cdot (z_2 - t) \cdot (x_1 - t), \quad (8)$$

або в канонічній формі

$$\left[t - \frac{1}{2} \cdot (x_1 + y_2) \right]^2 = \Delta x \cdot \left[y + \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot (x_1 + y_2)^2 - x_1 \cdot y_2 \right) \right], \quad (9)$$

$$\left[t - \frac{1}{2} \cdot (x_1 + z_1) \right]^2 = \Delta x \cdot \left[z + \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot (x_1 + z_1)^2 - x_1 \cdot z_1 \right) \right]. \quad (10)$$

Таким чином, в цьому випадку проекції траєкторії прообразу A – конгруентні квадратичні параболи (9), (10) з параметром $\frac{1}{2} \cdot \Delta x$.

Ілюстрацією грамографічного відображення є епюр (рис. 2). На епюрі представлені первинні (на рухомій площині π) f_1' і вторинні (перепроєкційовані з π на нерухомі координатні площини xu , xz , yz) $^1 f_1'$, $^2 f_1'$, $^3 f_1'$ проекції прямолінійної траєкторії f_1 прообразу (точки) A в $\mathcal{W}$ відображенні.

A_0 , P_0 , π_0 – початкові положення прообразу A , центру проєціювання P , площини проєкцій π . f_2 – траєкторія руху P , f_3 – напрямний вектор руху площини π . Всі рухи рівномірні, швидкість всіх елементів проєціювання рівні, рух одночасний. Такий режим руху названий канонічним. Як було показано раніше, всі проекції траєкторії f_1 – квадратичні параболи.

Результати та їх обговорення

Окрім вирішення прямої задачі кінематичного проєціювання, яка переважно полягає у побудові проекції траєкторії руху об'єкта проєціювання, цей різновид проєціювання надає і можливість рішення зворотної задачі, а саме за відомою проекцією траєкторії руху об'єкта пошук його координат. Зворотна (локаційна) задача кінематичного проекційного відображення, як зазначено вище, полягає у визначенні положення прообразу A за його образом A' , тобто

$$F^1: A' \subset \pi \rightarrow A \subset \Pi$$

в довільний момент часу t (рис. 3).

Рис. 3. Принципова схема грамографічного відображення рішення “оберненої задачі” на пошук об’єкта при кінематичному проєціюванні

Очевидно, що для ін'єктивності локації необхідно мати два компоненти A'_1, A'_2 образу A' , отриманих проєкціюванням прообразу A із двох центрів P_1, P_2 (лінійні відображення) (Kalynovska et al., 1994), або із двох конгруенцій (нелінійні відображення) (Kalynovska et al., 1994)

$$F^1 : A'_1, A'_2 \xrightarrow{P_1, P_2} A$$

$$F^1 : A'_1, A'_2 \xrightarrow{S_1^2(\varphi_1, \varphi_{1_2}), S_2^2(\varphi_2, \varphi_{2_2})} A$$

Строго графічне (циркульне) розв'язання задачі можливе в однорідному просторі, тому що реалізується в кінцевому результаті – як перетин двох прямолінійних проєкціюючих променів s^0_1 і s^0_2 ($A = s^0_1 \cap s^0_2$) (Kalynovska et al., 1994).

Прикладом виробничого використання кінематичного проєціювання може слугувати процес автоматизованого обробки відповідним чином облаштованих

сільськогосподарських угідь. Його принципова схема відображена на рис. 4. До автоматизованого комплексу обробки земельної ділянки тут входять оснащений приймальною антеною та системою дистанційного керування виконавчий агрегат із функціональним навісним обладнанням для обробки землі чи сільськогосподарських культур. Наприклад, трактор з причіпним плугом, боровами чи косаркою, комбайн, моторизований обприскувач тощо. Переміщеннями моторизованого землеобробного механізму та його виконавчими агрегатами дистанційно керують із віддаленого пункту дистанційного керування, оснащеного комп'ютерною технікою з відповідним програмним забезпеченням, монітором для відслідковування за переміщеннями землеобробної техніки та радіолокаційною станцією (РЛС) для прийняття та передачі радіосигналів відслідковування та корегування роботами механізмів і агрегатів землеобробної техніки.

Рис. 4. Спеціалізований сільськогосподарський комплекс автоматизованого керування землеобробною технікою із використанням пульта керування

Для усунення спотворення нерівностями земельної ділянки радіосигналів на ділянці додатково можуть облаштовувати допоміжну радіовежу із приймально-передавальною антеною. За відсутності радіовежі функції контролюючої приймально-передавальної ланки можуть бути покладені на відповідно оснащений безпілотний літальний апарат (БПЛА). Літальний апарат, наприклад дрон, літаючи чи “зависаючи” над оброблюваною ділянкою, сприйматиме керівні радіосигнали від пульта керування РЛС та надсилатиме на пульт керування інформативні сигнали про місце розташування землеобробної техніки.

Дана технологічна схема землеобробки є прикладом можливості застосування принципів кінематичного проєціювання. Рухомий із певними швидкістю та прискоренням землеобробний агрегат тут є об'єктом проєціювання, відслідковуючий переміщення землеобробного агрегату літаючий БПЛА слугує у даному випадку рухомим центром проєціювання. Екран комп'ютерного монітора на пульті управління тут відіграє роль “плаского носія інформації”, тобто за термінологією нарисної геометрії “картинної площини проєціювання”. Переважно тут на екрані висвітлюється траєкторія руху землеобробного агрегату та його можливі відхилення від неї. Ці відхилення під-

даються негайному корегуванню. Дана система за потреби може відобразити в аксонометричному відтворенні також розташування та координати і землеобробного агрегата, і контролюючого БПЛА, тобто об'єкта і центра проєціювання. Однак переважно у цьому немає потреби, оскільки цілком достатньо зображення облаштованої на БПЛА чи радіовежі відеокамери.

Отже, у даному випадку, оперуючи складовими кінематичного проєціювання, тобто рухомими об'єктами проєціювання – землеобробним агрегатом, центром проєціювання – літаючим БПЛА, а також “умовно рухомою із нульовою швидкістю” площиною проєціювання, можна забезпечити зведення до мінімуму можливих помилок людини-оператора. Адже в існуючій технологічній схемі керівництво рухами та переміщеннями землеобробного агрегату здійснюється за зображеннями відеокамер в ручному режимі. І тут неминучий вплив людського чинника. Таким чином, застосування кінематичного проєціювання в технологічних схемах автоматизованого землеобробітку спроможне підвищити продуктивність та якість цього процесу завдяки усуненню можливих похибок операторів.

У даному прикладі вдосконалення автоматизованого виробництва ми мали приклад вирішення так званої “прямої задачі” кінематичного проєціювання. Ця задача передбачає пошук та побудову на пласкому носії траєкторії (проєкції) просторового переміщення об'єкта проєціювання, що рухається із певними швидкостями. При цьому використовують дані про швидкість та траєкторію просторових переміщень одного центра проєціювання. В розглянутому прикладі у якості якого розглядався БПЛА.

На рис. 5 зображена, як приклад, одна із можливих у практичному застосуванні принципова схема рішення “оберненої” задачі кінематичного проєціювання. Тут зображено її використання для визначення просторових координат невідомого БПЛА за проєкціями траєкторії його просторового переміщення. Із технічних засобів для виявлення просторових координат невідомого об'єкта, наприклад, як зображено на схемі, дрона А, тут використовують два оснащені радіопередавачами пошукові дрони № 1 та № 2. Цим пошуковим дронам у принциповій схемі відведено роль центрів проєкування P_1 та P_2 . Зв'язок із пошуковими дронами здійснюється через оснащену відповідною комп'ютерною технікою із належним забезпеченням наземною радіолокаційною станцією (РАС) (на рисунку не відображено). Пошук координат невідомого об'єкта здійснюється у такій послідовності. Спеціальною комп'ютерною програмою задають координати уявного просторового центра (точка О) системи відліку, тобто системи координат із взаємно перпендикулярними осями x , y та z . Задавши координати трьох довільних точок, наприклад L, N, M, призначають просторове розташування “картинної пло-

щини” α , на яку проєктуватимуться точки проєкції траєкторії руху невідомого об'єкта. Подається команда на пошукові дрони № 1 та № 2, що як центри проєкування із незначними інтервалами в часі спрямовують проєктуючі промені на невідомий літальний апарат (дрон А у даному випадку). Комп'ютер прораховує точки перетину проєктуючих променів P_1A_2 та P_2A_1 із “картинною площиною” α , тобто точки A'_1 і A'_2 , формує уявну січну площину β , що задана двома проєктуємими променями $P_1A_2 = P_1V$ та $P_2A_1 = P_2C$ як площини, заданої пересіченими прямими. Комп'ютерна програма прораховує розташування лінії k як лінії, що являє собою лінію перетину між собою двох відомих площин α та β і проходить через вже відомі координати точок A'_1 і A'_2 .

Через незначний проміжок часу Δt всі три рухоми із різними швидкостями дрони змінюють в просторі своє розташування. Повторяться вищеописані етапи кінематичного проєціювання, і за сигналами відбитих від розшукуваного невідомого об'єкта радіохвиль чи лазерного променя комп'ютер перерахує і відобразить на екрані зміни координат дронів пошукувачів, що є центрами проєціювання, та зміни координат їх проєкцій на “картинній площині”. При цьому (у випадку потреби) сформується і відобразиться нова лінія l перетину сформованої γ новими проєктуємими променями, площини σ із “картинною площиною”, тобто $l = \sigma \cap \alpha$. Своєю чергою перетин на “картинній площині” ліній l та k між собою сформує точку $K_1 = l \cap k$, яка належить проєкції траєкторії просторових переміщень невідомого об'єкта (дрона А) на “картинній площині”.

Знову все повториться через проміжок часу Δt . На “картинній площині” відобразиться чергова лінія $n = \gamma \cap \alpha$ як лінія перетину чергової площини $\gamma = P_1 A'_3 \cap P_2 A'_3$, сформованої новим перетином чергової пари проєктуючих променів. Перетин цієї лінії n із попередньо побудованою лінією l надають нову точку K'_{02} , тобто $K'_{02} = n \cap l$. А по чергове з'єднання точок K'_{01} , $K'_{02}, \dots, K'_{0n}$ і сформує шукану проєкцію траєкторії просторових переміщень невідомого літаючого об'єкта, тобто дрона А.

Оскільки переважно літаючі об'єкти переміщуються у тривимірному просторі із певними значеннями висоти по координаті Z , то одночасно із заданням горизонтально розміщеної “картинної площини” α доречно задавати бодай ще одну перпендикулярну до α “картинну площину”, наприклад ω . І одночасно аналогічно будувати і на цій “картинній площині” проєкцію траєкторії руху об'єкта А.

Тоді, провівши із відповідних точок горизонтальної та перпендикулярної їй допоміжної площини ω лінії зв'язку, комп'ютерна програма розшукає аксонометричну проєкцію просторової траєкторії руху літаючого об'єкта (дрона А) та координати будь-якої точки цієї траєкторії руху. Це і є кінцевим результатом рішення даної задачі.

Рис. 5. Визначення координат та траєкторії руху невідомого об'єкта рішенням “оберненої задачі” кінематичного проєціювання

Дана схеми пошуку координат та траєкторій невідомих рухомих об'єктів є доволі універсальною і може застосовуватися як для їх пошуку в повітряному просторі, так і для визначення їхнього місця розташування на суші, на воді та у товщі води. Порівняно з існуючими методами виявлення та знешкодження ворожих БПЛА-розвідників, які ґрунтуються на пошуку і виявленню цих літальних апаратів як “матеріального тіла певної маси”, метод кінематичного проєціювання математично прораховує координати об'єкту як точки перетину проєктуючих променів. А це і простіше, і на порядок точніше. Отже, перевагами кінематичного проєціювання є:

- спроможність визначення та відображення об'єкта на екрані комп'ютера не тільки в плоскому відображенні, а і з врахуванням його просторової координати по висоті, наприклад, віддаленості від горизонту. Це надає можливість спостережень за переміщеннями об'єкта не лише у часовому інтервалі, а й у тривимірному просторі.

Висновки

1. Стрімкий розвиток у сьогоденні комп'ютерної техніки та її програмного забезпечення надав можливість широкого практичного застосування кінематичного проєціювання, яке дозволяє відображати в проє-

кційному зв'язку рухомих із взаємонезалежними швидкостями в просторі та часі класичні складові проєціювання, а саме: його центр, об'єкт, проєктуючий промінь та проєкцію на “картинну площину”.

2. Рішення так званої “прямої задачі” кінематичного проєціювання передбачає можливість побудови на “картинній площині” проєкцій траєкторії руху об'єкта проєціювання як у площинному, так і в аксонометричному відображенні. У практичному застосуванні це надає можливість завдання, відслідковування та корегування траєкторій руху, наприклад, транспортних засобів, механізованих землеробних засобів автоматизованих землеробних комплексів тощо.

3. Рішення так званої “оберненої задачі” кінематичного проєціювання передбачає можливість пошуку координат руху та просторового місцезнаходження об'єкта проєціювання при відомій траєкторії його руху. Для цього використовують два рухомих незалежних центри проєціювання, перетин проєктуючих променів яких відображає координати підлягаючого ідентифікації невідомого об'єкта. Застосування рішень “оберненої задачі” кінематичного проєціювання буде ефективним для пошуку в повітряному просторі літальних апаратів та нерозпізнаних об'єктів, а також для виявлення у товщі води рухомих плавучих засобів, зокрема торпед, підводних човнів, підводних гідроциклів тощо.

Перспективи подальших досліджень. В подальшому планується використання описаних вище методів для виявлення координат БПЛА. Суть проблеми полягає в тому, що через незначну масу цих розвідувальних апаратів (дронів) їх пошук у просторі як “матеріальної” точки або за шумовими ефектами працюючого двигуна вкрай ускладнений. У результаті спрямовані на ураження розвідувальних БПЛА засоби ПВО, не володіючи точними координатами розташування ворожих розвідувальних БПЛА, малоефективні. Для цього необхідні точні координати розташування об’єкта в просторі. Саме це і спроможне забезпечити кінематичне проєціювання.

References

- Bespalov, A., Svidrak, I., & Boiko, O. (2020). Improving the performance of vibration feeders with an electromagnetic vibration drive and a combined vibration system. *Scientific Messenger of LNU of Veterinary Medicine and Biotechnologies. Series: Food Technologies*, 22(93), 26–30. doi: 10.32718/nvlvet-f9305.
- Kalinovskaja, O. P., Glogovskij, V. V., & Pul'kevich, I. G. (1994). K probleme edinoj teorii proekcionnyh otobrazhenij. *Prikl. geom. i inzh. graf.*, 57, 45–50 (in Russian).
- Kalynovska, O. P., Hlohovskyi, V. V., & Pulkevych, I. H. (1994). Neliniini operatory kinematychnykh proektsiinykh vidobrazhen. *Pr. Lv. Mizh nar. nauk.-metod. konf. z heometrychnoho modeliuвання, inzh. ta komp. hraf. L.*, 36 (in Ukrainian).
- Kalynovska, O. P., Hlohovskyi, V. V., Pulkevych, I. H. (1994). Lokatsiini zadachi kinematychnykh proektsiinykh vi-dobrazhen. *Pr. Lv. Mizhnar. nauk.-metod. konf. z heometrychnoho modeliuвання, inzh. ta komp. hraf. L.*, 37 (in Ukrainian).
- Kul'minskij, O. K., & Nikolaevskij, G. K. (1971). Kinoaksonometrija kak metod ob#emno-graficheskogo mode-lirovanija. *Prikl. geometrija i inzh. grafika*, 12, 136–138 (in Russian).
- Lihachev, L. N. (1975). *Kinoperspektiva*. M.: “Vysshaja shkola” (in Russian).
- Mihajlenko, V. E., Obuhova, V. S., & Podgornij, A. L. (1972). Formoobrazovanie obolochek v arhitekture. K. Budivel'nik (in Russian).
- Pilipaka, S. F. (1991). Primenenie metodov nachertatel'noj geometrii dlja nahozhdenija skorostej proizvol'nyh toček tverdogo tela, sovershajushhego prostranstvennye dvizhenija. *Prikl. geometrija i inzh. grafika*. 51, 62–64 (in Russian).
- Pulkevych, I. H. (1994). Liniini operatory kinematychnykh proektsiinykh vidobrazhen. *Pr. Lviv. Mizh nar. nauk.-metod. konf. z heometrychnoho modeliuвання, inzh. ta komp. hraf. L.*, 35 (in Ukrainian).
- Rynin, N. A. (1936). *Kinoperspektiva*. M.: Kinofotoizdat (in Russian).
- Shevchyk, A., Svidrak, I., Bilyk, N., & Poberezhska, I. (2021). Crystallomorphological and physical properties of apatite from carbonatites. *Scientific Messenger of LNU of Veterinary Medicine and Biotechnologies. Series: Food Technologies*, 23(95), 25–32. doi: 10.32718/nvlvet-f9505.
- Tkach, D. I. (1968). Nekotorye voprosy kinoperspektivy i postroenie arhitekturnykh perspektiv. *Izd. vyssh. uch. zaved., ser. “Stoitel'stvo i arhitektura”*, Novosibirsk (in Russian).